УДК 371.3:51

ТЕКСТОВЫЕ СЮЖЕТНЫЕ ЗАДАЧИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБУЧЕНИЮ УЧАЩИХСЯ ИХ РЕШЕНИЮ

В. А. Далингер

Доктор педагогических наук, профессор, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

TEXT SUBJECT TASKS, THEIR CLASSIFICATION AND METHODICAL RECOMMENDATIONS ABOUT TRAINING OF PUPILS IN THEIR DECISION

V. A. Dalinger

Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

Abstract. In article the questions relating to a technique of training of pupils in the solution of text subject tasks are considered, the concept of a text subject task is analyzed, their role and a place in training in mathematics are shown, various classifications of text subject tasks are considered, stages of the solution of text subject tasks are given and methodical recommendations about realization of each stage are made, various ways and methods of the solution of text subject tasks are analyzed, the special attention is paid to a question of verification of the solution of text subject tasks, the main defects of pupils which take place at the solution of text subject tasks by method of drawing up the equation are specified.

Keywords: text subject tasks; functions of text subject tasks; classification of text subject tasks; technique of training in the solution of text subject tasks; ways and methods of the solution of text subject tasks.

Достижение учащимися таких качеств усвоения содержания математического образования, как осознанность, прочность, глубина, системность, обобщенность, возможно лишь при реализации деятельностного подхода в обучении. Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач. Именно задачи являются тем средством, которое в значительной степени направляет и стимулирует учебно-познавательную активность школьников.

Если раньше задачи применялись преимущественно на этапе закрепления знаний, то сейчас их функции в обучении математике стали значительно многообразнее, они используются на каждом из трех этапов, составляющих структуру учебной деятельности: мотивационно-ориентировочном, исполнительско-операционном, контрольно-оценочном.

Задачи способны развивать все компоненты математической подготовки: знания и умения, установленные программой обучения; мыслительные операции и методы, присущие математической деятельности; математический стиль мышления; рациональные, продуктивные способы учебно-познавательной деятельности и т. д.

Особое место в обучении математике занимают текстовые сюжетные задачи.

Известный русский методист В. А. Евтушевский (1836–1888) так охарактеризовал функции сюжетных текстовых задач в обучении математике: «Задачи, предлагаемые в классе, заключают в себе живой материал для упражнения мышления ученика, для вывода математических правил и для упражнения в приложении этих правил в решении частных практических вопросов» [8, с. 88].

Чтобы учащиеся смогли научиться решать текстовые задачи, они должны стать их объектом деятельности, ибо, как отмечает А. Н. Леонтьев: «Актуально осознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной активности субъекта, то есть занимает структурное место непосредственной цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности» [11, с. 265].

Текстовые задачи, решаемые методом составления уравнений и их систем, традиционно считаются для учащихся одними из самых сложных. Это объясняется в значительной степени тем, что если задачи другого рода требуют для своего решения формально-технического аппарата, применение которого алгоритмизируемо, то решение текстовых сюжетных задач требует от учащихся еще и этапа составления уравнения или системы уравнений, который в значительно меньшей степени формализуем и требует от решаемого понимания имеющихся в задаче условий и перевода их на язык математики, и этот этап в большей степени, чем все остальные, носит эвристический характер.

В методической литературе существует такая трактовка понятия «текстовая задача»: «Задачи, в которых зависимость между данными и искомыми не выражена в явной форме, а сформулирована словами, так же как и вопрос задачи, называются собственно задачами или задачами с текстом» [16, с. 202].

Л. М. Фридман дает такое определение: «Под сюжетными мы понимаем задачи, в которых описан некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс), с целью нахождения определенных количественных характеристик или значений. Эти задачи имеют и другое название: текстовые, практические, аналитические (задачи на составление уравнений или систем уравнений), арифметические и т. д.) [17, с. 3].

Роль текстовых задач в процессе обучения математике многообразна, и она сводится главным образом к следующим функциям:

- служат усвоению математических понятий и отношений между ними;
- обеспечивают усвоение учащимися специфических понятий, входящих в предметную область задач;
- способствуют более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости;
- повышают вычислительную культуру учащихся;
- учат школьников применению такого метода познания действительности, как моделирование;
- способствуют более полной реализации межпредметных связей;
- развивают у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать;
- развивают логическое мышление школьников;
- развивают познавательные способности учащихся через усвоение способов решения задач;
- формируют универсальные качества личности, такие как привычка к систематическому интеллектуальному труду, стремление к познанию, потребность в контроле и самоконтроле и т. п.;
- прививают и укрепляют интерес школьников к математике;
- осуществляют предпрофильную и профильную подготовку учащихся.

Одной из основных и главных функций текстовых задач в обучении математике является функция формирования и развития у учащихся общих умений и способностей в решении любых задач.

Л. М. Фридман [17] указывает следующие функции сюжетно-текстовых задач: вводно-мотивационная, иллюстративная, конкретизирующая, применения и использования математических закономерностей, формирования математических умений и навыков, формирования общеучебных умений, контрольно-оценочная, воспитания характера и воли учащихся, развития творческого мышления и воображения.

Обобщая сказанное, можем заключить, что решение текстовых задач формирует у учащихся предметные и общеинтеллектуальные умения и навыки, навыки учебно-познавательной деятельности и самообразования.

В литературе имеют место различные классификации текстовых задач. Так, например, А. Я. Блох [2] классифицирует их по объектам, рассматриваемым в них, по методам решения, по их месту в системе обучения.

И. В. Арнольд [1] разбивает все текстовые задачи на две категории: задачи, описывающие явления, характеризуемые одной величиной; задачи, описывающие явления, характеризуемые несколькими величинами.

В. И. Крупичем [9] впервые в методике преподавания математики предложена характеристика текстовых задач по основному отношению между данными и искомыми.

В каждой задаче как сложном объекте В. И. Крупич выделяет внешнее и внутреннее строение. Внешнее сюжетное строение он называет информационной структурой задачи. Внутреннее строение задачи – структуру – составляет основное отношение, которое остается относительно неизменным при любых ее преобразованиях в процессе поиска ее решения.

Классификация текстовых задач в таком случае проводится по внутреннему строению их, то есть по основному отношению, реализованному в них.

Интересна, в плане практического применения, классификация текстовых задач, предложенная Г. В. Дорофеевым, которая основывается на смысле слов и предложений естественного языка, на котором сформулирована задача.

«Целесообразно, – отмечает Г. В. Дорофеев, – выделить два типа задач – задачи, в которых речь идет о некоторой реальной, а более точно о *реализованной* жизненной ситуации, и задачи *потенциального* характера, в которых жизненную ситуацию требуется сконструировать, смоделировать, выяснить условия, при которых она реализована» [7, с. 38]. Принципиальное отличие этих двух групп текстовых задач состоит в том, что в одной из них ситуации постулируются, а в другой – нет.

Приведем примеры таких задач.

1) Вместимости трех кубических сосудов A, B и C относятся как 1:8:27, а объемы налитой в них воды – как 1:2:3. После переливания из A в B и из B в C получили во всех трех сосудах слой воды одинаковой глубины. Затем перелили из C в B $128\frac{4}{7}$ л, а из B в A столько, чтобы глубина воды в A удвоилась по сравнению с глубиной воды в B. При этом оказалось, что в A на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

Эта задача на реализованную ситуацию. В них, как правило, вопрос констатирует уже совершившийся факт.

2) Две бригады рабочих должны были по плану изготовить за месяц 680 деталей. Они решили изготовить сверх плана 118 деталей, для чего первая бригада должна перевыполнить месячное задание на 20 %, а вторая – на 15 %. Сколько деталей должна была по плану изготовить каждая бригада за месяц?

Эта задача потенциального характера. В таких задачах вопрос, как правило, обращен в будущее и приглашает как бы к действию.

Более детально эту классификацию разработал С. М. Чуканцев [18], положив в основу характер ответа к задаче: возможно ли на практике осуществить изложенную в условии задачи ситуацию или нет. Он особо выделяет задачи, в которых излагаются практически выполнимые ситуации, и задачи с практически невыполнимыми ситуациями. Вследствие чего им выделено четыре вида задач.

1. Задачи на реализованные ситуации, практически выполнимые.

Пример. Из цистерны в бассейн сначала перелили 50 % имевшейся в ней воды, затем еще 100 л и, наконец, еще 5 % остатка. В итоге количество воды в бассейне возросло на 31 %. Сколько воды было в цистерне вначале, если в бассейне вначале было 200 л воды?

Ответ: 1000 л.

2. Задачи, в условиях которых формально излагаются как бы реализован-

ные ситуации, а фактически – невыполнимые ситуации.

Пример. В трех баках было вместе 50 л бензина, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и в третьем баках стало бензина поровну. Сколько бензина было первоначально в третьем баке?

Ответ: в третьем баке было (– 4 л) бензина, чего, конечно, быть не может.

С. М. Чуканцев [18] считает, что таких задач, с заведомо ложными данными, не должно быть в школе, ибо ученик в них встречается с описанием заведомо невыполнимой ситуацией, относительно которой, однако, утверждается, что она якобы где-то, когда-то, кем-то выполнялась.

В методической литературе встречается и другая точка зрения на эту проблему, в частности, М. М. Лимана [12], который отмечает, что «нет оснований совершенно изгонять такие задачи из школьных учебников», так как эти задачи в ряде случаев помогают более глубокому пониманию и запоминанию отдельных теоретических положений, ставят школьников перед необходимостью исследовать условия возможности совершения описываемой ситуации.

3. Задачи потенциального характера, отражающие практически выполнимые ситуации.

Пример. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь круга стала больше на 96 %?

Ответ: на 40 %.

4. Задачи потенциального характера, отражающие практически невыполнимые ситуации.

Пример. Из двух цистерн надо выкачать бензин так, чтобы в них осталось равное количество. Через сколько минут в цистернах останется равное количество бензина, если из первой, в которой находится 32 т, будут выкачивать в минуту по 0,22 т, а из второй, в которой находится 36 т, – по 0,23 т?

Ответ: получим значение $t = 400$ мин, но это не будет соответствовать требуемым по условию задачи ограничениям:

$$t \le 32 : 0{,}22 \text{ и } t \le 36 : 0{,}23.$$

Следовательно, задача бессмысленна с точки зрения описываемой в ней ситуации.

В школьном курсе математики абсолютное большинство задач – это задачи с реализованной ситуацией и лишь небольшой процент этих задач – это задачи на потенциальное исполнение ситуаций. В практической деятельности человеку чаще всего приходится решать задачи с потенциальной ситуацией, а поэтому методически оправдано увеличение таких задач в школьном курсе математики. Их ценность, как отмечает С. М. Чуканцев [18], состоит в том, что в условиях таких задач формулируется некоторая проблема, решать которую предлагается самим учащимся, а это в большей степени заинтересовывает школьников: интереснее отвечать на вопрос «Что будет?», нежели на вопрос «Что было?».

Приведенная здесь классификация текстовых задач поможет нам ответить на вопрос: «Нужна ли проверка решения текстовых задач?», который мы рассмотрим подробно несколько позже.

Текстовые задачи делят на простые и сложные. В основе такого деления лежит определение: «Если в сюжетной задаче задано одно соотношение между значениями одной и той же величины или разных величин, то такую сюжетную задачу будем называть простой; если же в сюжетной задаче задано два или больше взаимосвязанных соотношений, то такую задачу будем называть сложной» [17, с. 87]. Под соотношением понимается лишь такая связь между значениями величин, которую нельзя расчленить на другие связи, более простые.

В нашей классификации [4; 5; 6] текстовые задачи подразделяются следующим образом: задачи на движение; задачи на работу; задачи на проценты; задачи на смеси, сплавы и концентрацию; задачи, в которых неизвестные – целые числа; задачи, для решения которых нужно находить наибольшее или наименьшее значение; задачи, решение которых требует рассмотрения нескольких вариантов; задачи, процесс решения которых приводит к системе уравнений, содержащей уравнений меньше, чем неизвестных; задачи, для решения которых необходимо использовать неравенства.

Главное внимание при обучении учащихся способу решения текстовых задач методом составления уравнений должно быть обращено на сознательную отработку этапности решения. Полная схема включает такие этапы: 1) объяснение к составлению уравнения; 2) составление уравнения; 3) решение уравнения; 4) проверка; 5) запись ответа; 6) анализ решения задачи.

На первом этапе проводится анализ задачи, выделяются объекты и процессы, подлежащие рассмотрению, выделяются величины, характеризующие эти процессы, выбирается неизвестная величина, через которую выражаются остальные.

На втором этапе выявляются основания для составления уравнения и составляется само уравнение.

Третий этап не требует комментирования. Разговор о проверке поведем особо. Ответ к задаче следует записывать подробно, если сама задача решалась без подробного оформления и кратко, если оформление решения задачи было выполнено подробно. Целью шестого этапа является выявление рациональных путей решения, уяснение и уточнение идеи и метода решения, уяснение общих правил для решения подобных задач.

Рассмотрим более обстоятельно вопрос о проверке при решении текстовых задач. В литературе по методике преподавания математики представлен самый широкий спектр точек зрения на вопрос о проверке.

Ряд исследователей считают, что от учащихся не следует «требовать при решении текстовых задач на составление уравнений «проверки» как обязательного момента решения задачи, так как нет необходимости в такой «проверке» по каким-либо соображениям принципиального характера» [15, с. 46].

Диаметрально противоположного подхода придерживаются другие исследователи, считающие, что «проверка является *необходимым элементом* решения текстовой задачи; без проверки задача не может считаться решенной» [3, с. 44].

В литературе встречается точка зрения, согласно которой вопрос о проверке решения надо рассматривать с двух сторон: с одной – как один из этапов при решении задачи, а с другой – как составную часть записи ее решения.

Нам представляются наиболее интересными точки зрения Г. В. Дорофеева [7] и В. Г. Болтянского [3] на проблему «проверки».

Г. В. Дорофеев, деля текстовые задачи на две группы, в зависимости от того, реализована ли в них ситуация или же она только потенциально заложена в ней, аргументированно считает, что никакого дополнительного исследования полученного единственного корня не требуют задачи на реализованные ситуации. Корень уравнения, найденный в результате решения текстовой задачи потенциального характера, требует обязательной проверки.

«Задача, в которой речь идет о реализованной ситуации, – пишет Г. В. Дорофеев, – должна считаться полностью решенной, если полученная в ходе ее решения система соотношений (уравнений или неравенств) имеет единственное решение. «Проверка» этого решения каким бы то ни было способом не является логически необходимой. Если же полученная система соотношений имеет несколько решений, то каждое из них подлежит дальнейшему исследованию – «проверке» … Независимо от числа решений этой системы, все они нуждаются в дальнейшем исследовании, и таким образом, в этом случае «проверка» является логически абсолютно необходимой» [7, с. 45].

Несколько другой взгляд на эту проблему у В. Г. Болтянского [3], который верно отмечает, что составленное для решения текстовой задачи уравнение не учитывает ряд ограничений на физические величины, которые должны быть наложены по смыслу задачи, а это приводит к тому, что не все корни составленного уравнения оказываются пригодными для получения решения текстовой задачи, причем это происходит и в случае одного корня.

Рассмотрим для примера задачу: «В трех баках было вместе 50 л бензина, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и третьем баках стало бензина поровну. Сколько бензина было первоначально в первом баке?»

Обозначив количество бензина в первом баке до переливания через x, составим уравнение $x-10=50-x \;\; x-10 \;\; +26,$ решая которое, получим $x=32.$

Имея единственный положительный корень уравнения, не производя проверки по условию задачи, мы могли бы ошибочно записывать ответ к задаче: в первом баке до переливания было 32 л бензина. Но рассмотрим ограничения на величины по смыслу задачи. Такие величины, как количество бензина в первом баке до переливания, количество бензина во втором баке, количество бензина в третьем баке до переливания, количество бензина в первом баке после переливания, количество бензина в третьем баке после переливания, разность между количеством бензина во втором и третьем баках после переливания, должны быть неотрицательны. Но при $x=32$ получаем, что количество бензина во втором баке $x-10$ будет 22 л, а при этих данных количество бензина в третьем баке до переливания $50-x- \;\; x-10$ будет выражаться числом отрицательным (– 4), чего быть, конечно, не может.

Этот пример показывает, что в **любом случае полученный корень уравнения нужно проверять по смыслу задачи.**

В литературе нет единого подхода к трактовке способа проверки решения текстовых задач.

Бытует точка зрения, что проверка должна осуществляться путем решения обратной задачи. Обратной к данной считается задача, в которой величине, искомой в исходной задаче, придается значение, полученное в ходе решения, а одно из данных исходной задачи считают неизвестным.

Другая точка зрения [3; 7] состоит в том, что обратные задачи не могут являться средством контроля правильности решения текстовой задачи, ибо «…к логике решения исходной задачи решение обратной задачи имеет достаточно отдаленное отношение» [7, с. 42]. Решение обратной задачи недостаточно для гарантии правильности решения исходной текстовой задачи, так как уравнение, составленное для решения обратной задачи, всегда будет иметь корнем число, которое было дано в исходной задаче. Г. В. Дорофеев пишет по этому поводу: «Таким образом, проверка всегда «удается», точнее, почти всегда, поскольку может случиться, что уравнение, составленное при решении обратной задачи, будет иметь еще и другие корни» [7, с. 42].

Анализируя метод обратных задач, В. Г. Болтянский отмечает, что составление и решение обратной задачи «не заменяет проверки решения по смыслу задачи, то есть проверки выполнения смысловых ограничений» [3, с. 35].

Подытожим сказанное. При решении текстовых задач проверка по смыслу задачи является необходимым элементом решения, и она осуществляется путем разыгрывания условия задачи: для этого найденный корень уравнения «прогоняют» по условию задачи от начала до конца, вычисляя все входящие физические величины и следя за выполнением наложенных смысловых ограничений.

Анализ школьной практики показывает, что у учащихся остается на низком уровне сформированность умения решать текстовые задачи. Подтвердим сказанное примерами.

Перечислим основные недочеты учащихся, которые имеют место при решении текстовых задач методом составления уравнений:

1) школьники не владеют решением текстовых задач с помощью метода составления уравнений и их систем, более того, они не знают и не различают некоторых особенностей в решении текстовых задач «на движение», «на работу», «на

смеси, сплавы и концентрацию», «на проценты» и т. д.;

2) нерационально выбирается в качестве независимой переменной та или иная величина в задаче. Как правило, учащиеся стремятся выбрать в качестве независимой переменной величину искомую в задаче. В ряде же случаев это делать нецелесообразно;

3) учащиеся при решении не следят за размерностью величин, встречающихся в задаче. Часто размерность одних величин не согласуется с размерностью других;

4) составленное уравнение не соответствует смыслу задачи. Это происходит вследствие того, что учащиеся неверно трактуют некоторые условия задачи, а также потому, что ими неверно понимается смысл некоторых слов и словосочетаний, таких, например, как себестоимость, сверх плана, рентабельность и т. д.;

5) не выполняется проверка полученного ответа, и это, как правило, приводит к нелепостям: 1,25 землекопа; – 377 и т. д.;

6) составленное для решения текстовых задач уравнение не учитывает ряд ограничений на физические величины, которые должны быть наложены по смыслу задачи, а это, в свою очередь, приводит к тому, что не все корни составленного уравнения оказываются пригодными для получения ответа к текстовой задаче;

7) очень часто, не вдаваясь в глубокий анализ условия задачи, учащиеся не видят противоречивых условий, избыточных или же недостающих данных. Конечно, это происходит вследствие того, что им всегда в школе предлагаются «рафинированные» задачи, в которых ровно столько данных, сколько нужно для решения;

8) неверно или же нерационально оформляется учащимися решение текстовых сюжетных задач. В ряде случаев отсутствуют пояснения того, что взято за независимую переменную и как остальные величины выражаются через нее. Наиболее типичная ошибка состоит в том, что отсутствует в записях учащихся предложение, раскрывающее тот факт, на основе которого составлено уравнение, а вместо этого в работе пишется ничего не значащая фраза: «На основе условия задачи мы можем составить уравнение»;

9) одна из типичных ошибок состоит в том, что учащиеся не проводят дополнительной работы после решения или дополнительного исследования условия;

10) учащиеся неверно используют сокращения используемых в задаче величин.

Проведенный анализ практики преподавания математики в школе показывает, что выработка прочных умений и навыков решения текстовых задач всегда вызывала большие трудности, и тому есть как объективные, так и субъективные причины.

Анализ позволил выявить те просчеты учителей и недостатки учебников по математике, которые тормозят формирование у учащихся умения решать текстовые сюжетные задачи на нужном уровне.

Главная причина состоит в том, что при решении задачи учебно-познавательная деятельность учащихся направляется учителем главным образом на получение ответа на вопрос задачи, в ущерб ознакомлению школьников с методами и способами рассуждений, лежащих в основе поиска решения.

Учителем не стимулируется постоянный анализ обучающихся своей деятельности при решении задачи, в результате чего эта деятельность ими не осознается. «Наши наблюдения доказывают, – отмечает А. С. Крыговская, – что одна из причин неудач средних учащихся, несмотря на их работу и хорошее желание, состоит в отсутствии, часто полном, ситуаций такого рода, сознательно организованных в классе учителем, в которых анализировался бы уже пройденный путь с точки зрения методов и стратегий» [10, с. 22].

Причинами низкого уровня сформированности умения решать текстовые задачи явилось также стремление учителя решить с учащимися как можно больше задач, хотя умение решать задачи не находится в прямой зависимости от числа решенных задач.

Существенной, если не главной, причиной является ориентация учителя на

максимальное усвоение всеми учащимися алгебраического способа решения текстовых задач любой сложности. При таком подходе игнорируются склонности и способности учащихся, не учитываются их индивидуально-типические особенности, а обучение строится с ориентацией не на персонифицированную модель школьника, а на обобщенную модель среднего учащегося.

Обучать школьников решению текстовых задач следует с максимальным учетом уровня развития у них словесно-логического и интуитивно-практического мышления, индивидуального стиля деятельности, обусловленного темпераментом, значительных различий в предпочтительном способе действий (с опорой на образ или на слово) и способах запоминания (с опорой на зрение, слух и т. д.).

Причины низкого уровня сформированности соответствующих умений состоят в традиционных ошибках учителя, в его увлечении на уроке процедурой оформления решения задачи, а не процессом ее решения, в преобладании обучения решений задач по образцу, в отсутствии работы по формированию у учащихся навыков контроля и самоконтроля, в недостаточной работе по обеспечению переноса приема решения одних задач на другие, сходные с ними по содержанию и методам решения.

Отметим ряд **недостатков учебников по математике,** которые обусловливают у учащихся низкий уровень умения решать текстовые задачи:

1) в учебниках в системе задач не выдержано оптимальное соотношение задач, требующих репродуктивной деятельности учащихся;
2) отсутствуют специальные рефлективные задачи, способствующие осознанию учащимися способа решения;
3) в системе текстовых задач не обеспечивается постоянное возрастание сложности задач;
4) задачи одной и той же структуры не имеют в системе текстовых задач инвариантов относительно сюжета и входящих в них величин;
5) в учебниках преобладает единообразие форм предъявления задач;
6) недостает варьирования содержания задачи при сохранении метода ее решения.

Ученики за время обучения в школе решают около двадцати тысяч различных задач (по исследованию Ю. М. Колягина), но многие из них так и не приобретают необходимых умений по их решению. Главная причина тому, как уже отмечалось выше, это доминирование в процессе обучения практического решения конкретных задач в ущерб формированию у школьников общих приемов поиска их решения.

При решении текстовых задач с помощью уравнений можно придерживаться следующей схемы:

а) прежде всего необходимо изучить ее условие так, чтобы его можно было бы повторить устно;

б) искомые величины (величину) обозначить буквами (буквой). Очень часто решение задачи и составление уравнения упрощается, если обозначить буквой какую-нибудь вспомогательную неизвестную величину (величины), через которую легко выражаются искомые;

в) выразить искомые неизвестные величины через данные и вспомогательные величины, обозначенные буквами;

г) составить уравнение (систему уравнений), то есть составить два выражения, представляющие одну и ту же величину, и приравнять их;

д) найти корни (решения) составленного уравнения или системы уравнений;

е) исследовать по условию задачи, какие из корней уравнения (или решений систем уравнений) пригодны к решению задачи;

ж) записать ответ. Если задача решалась подробно, то ответ можно записать коротко, если же неподробно, то ответ записать развернуто.

Обратим внимание читателя на семь критериев полноценности решения задачи, сформулированных В. М. Брадисом: безошибочность; обоснованность; исчерпывающий характер; простота; ясность пути, приведшего к решению задачи; рациональность записи; завершающее обобщение решения.

Заметим, что не следует вводить неизвестные, размерность которых не встречается в условии задачи и не может быть получена как комбинация элементов условия. Введение таких неизвестных может усложнить решение задачи.

Выше мы уже отмечали, что решение текстовых задач алгебраическим способом учит школьников применению такого мощнейшего метода познания действительности, как моделирование. В самом деле, представляется, например, возможность показать школьникам, что такие, линейные по времени, процессы, как путь s, пройденный телом за время t при равномерном движении; работа s, совершаемая за время t; заполнение резервуара объемом s жидкостью за время t; площадь s, вспахиваемая трактором за время t и т. д., описываются одной и той же моделью – уравнением $s = v \cdot t$.

Полезно дать учащимся некоторые указания, которые окажут им помощь на различных этапах решения текстовой задачи методом составления уравнения.

I. На этапе анализа условия задачи:

1). Внимательно прочитайте условие и поймите содержание задачи.

2). Выделите процессы, о которых идет речь в задаче.

3). Установите, какими величинами характеризуется каждый процесс.

4). Выделите величины, которые известны и которые требуется определить.

5). Составьте краткую запись (схематическую, табличную или графическую) условия задачи.

II. На этапе составления уравнения:

1) Вспомните, известна ли Вам задача, родственная решаемой.

2) Можно ли свести решаемую задачу к уже известной.

3) Установите, какую из неизвестных величин в задаче следует принять за независимую, и обозначьте ее через x. Лучше через x обозначать меньшую из неизвестных величин.

4) Определите наиболее оптимальную последовательность для выражения других неизвестных величин через выбранную неизвестную.

5) Проверьте размерность составляемых выражений.

6) Установите, как сопоставляются в задаче величины: разностным сравнением, кратным сравнением, суммированием.

7) Установите уравниваемые величины и составьте уравнение.

III. На этапе контроля за решением задачи:

1) Проверьте по смыслу задачи корень уравнения, полученный вами.

2) Проверьте, все ли данные из условия задачи были использованы при решении.

3) Проверьте размерность величины, получившейся в ответе.

4) Выявите идею (главную мысль), положенную в основу решения.

5) Оцените общий подход выбранного способа задачи.

6) Найдите другие способы решения задачи.

7) Сравните различные способы решения задачи и установите наиболее рациональный.

В связи с тем, что в практику проведения выпускных и вступительных экзаменов введена такая форма контроля и оценки знаний, умений и навыков как тестирование, полезно учесть следующую рекомендацию.

В тестах очень часто используются задания закрытого типа, к ним предлагаются возможные варианты ответов, среди которых один верный, а остальные являются дистракторами (от английского distractor – «отвлекающий внимание»). Задача тестируемого – выбрать верный ответ. Для этого от него вовсе не требуется решить задачу от начала и до конца. Главное, указать правильный ответ. Выбрать же правильный ответ можно путем последовательного отбрасывания неверных ответов, причем, чем сложнее задание, тем скорее работает такой механизм.

Покажем на примере текстовой задачи на концентрацию и текстовой задачи на проценты, каким образом можно выбрать верный ответ из предложенных путем логических рассуждений, а не прямым, полным решением задачи.

Задача 1. Из сосуда, первоначально содержащего 11 л чистого спирта, отлили определенное количество содержимого и долили столько же воды. Когда эту операцию проделали еще два раза, спирта в сосуде осталось 2 л. За каждую операцию воды доливали одинаковое количество литров, равное:

1) $\sqrt[3]{\log_2 11}$; 2) $\frac{1}{3}\log_2 11$; 3) $11\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{11}}\right)$; 4) 3; 5) $\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

«Изюминка» задания состоит в том, что при данном наборе дистракторов, задачу вообще можно не решать, но при этом выбрать верный ответ.

Учитывая, что для того, чтобы при понижении концентрации спирта в растворе, после отливания раствора и доливания воды, всего за три раза отлили 9 л спирта, необходимо в первый раз отлить больше трех литров.

Среди приведенных вариантов ответов $11\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{11}}\right)$ – единственное число, больше трех.

Чтобы показать преимущество такого способа выбора правильного ответа приведем стандартное решение задачи.

Решение.

Пусть x л спирта отлили в первый раз (и столько же долили воды), тогда:

$\frac{11-x}{11}$ – концентрация спирта в сосуде после первой операции;

$\frac{11-x}{11}\cdot x$ – отлито спирта во второй раз;

$x+\frac{11-x}{11}\cdot x$ – отлито спирта за два раза;

$\frac{11-\left(x+\frac{11-x}{11}\cdot x\right)}{11}$ – концентрация после второй операции;

$\frac{11-\left(x+\frac{11-x}{11}\cdot x\right)}{11}\cdot x$ – отлито спирта в третий раз.

Суммируя количество спирта, отлитого за три раза, получаем уравнение $3x-\frac{3x^2}{11}+\frac{x^3}{121}=9$; поделим обе части уравнения на 11 и, произведя замену переменной $y=\frac{x}{11}$, преобразуем уравнение к виду: $y^3-3y^2+3y-\frac{9}{11}=0$.

Выделяя куб разности, получаем уравнение:

$$(y-1)^3+\frac{2}{11}=0.$$

Отсюда $y=1-\sqrt[3]{\frac{2}{11}}$, а $x=11\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{11}}\right)$.

Заметим, что выявить, каким путем получен верный ответ, тестирование, в котором требуется выбрать верный ответ, не может.

Эта задача больше подходит для той части тестирования, в которой требуется привести полное обоснование решения.

Очень часто при решении текстовых задач методом составления уравнений или системы уравнений приходится одну и ту же величину вычислять разными способами, а затем приравнивать полученные выражения (причем, вычислять приходится двумя или более способами). Приведем примеры.

Библиографический список

1. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических зада. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1946. – Выпуск 6.
2. Блок А. Я. Курс алгебры средней школы : методические рекомендации для слушателей ФПК. – М. : Изд-во МГПИ, 1985. – 85с.
3. Болтянский В. Г. Нужна ли проверка при решении текстовых задач на составление уравнений? // Математика в школе. – № 3. – 1971. – С. 42–45.
4. Далингер В. А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике. Выпуск 2. Текстовые задачи, решаемые методом составления уравнений : учебное пособие. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 1996. – 195 с.

5. Далингер В. А. Текстовые задачи на проценты, смеси, сплавы и концентрацию: учебное пособие. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2006. – 170 с.
6. Далингер В. А. Обучение учащихся решению текстовых задач методом составления уравнений: пособие для учителей. – Омск : Изд-во ИУУ, 1991. – 48 с.
7. Дорофеев Г. В. Проверка решений текстовых задач // Математика в школе. – № 5. – 1974. – С. 37–45.
8. Евтушевский В., Глазырин А. Методика приготовительного курса алгебры. – Спб, 1876.
9. Крупич В. И. Структура и логика процесса обучения математике в средней школе: Методические разработки по спецкурсу для слушателей ФПК. – М. : Изд-во МГПИ, 1985. – 117 с.
10. Крыговская А. С. Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. – № 6. – 1966. – С. 19–30.
11. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность. – М., 1977.
12. Лиман М. М. О задачах «невозможных» и задачах, не имеющих решения // Математика в школе. – № 1. – 1961. – С. 58–59.
13. Ляпин С. Е. Методика преподавания математики. – М. – Л., 1952.
14. Машбиц Е. И. Психологический анализ учебной задачи // Советская педагогика. – № 2. – 1973. – С. 58–65.
15. Полякова Т.Н. Нужна ли «проверка» при решении текстовых задач на составление уравнений? // Математика в школе. – № 1. – 1971. – С. 45–46.
16. Рудник А. В. Переформулирование текста задачи как путь отыскания ее решения // Из опыта преподавания математики в школе: Пособие для учителей / сост. А. Д. Семушин, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 1978. – С. 119–128.
17. Фридман Л. М. Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика: Учебное пособие для учителей и студентов педвузов и колледжей. – М. : Школьная Пресса, 2002. – 208 с.
18. Чуканцев С. М. О задачах на реализованные ситуации с ложными данными // Математика в школе. – № 2. – 1977. – С. 13–15.

Bibliograficheskij spisok

1. Arnol'd I. V. Principy otbora i sostavlenija arifmeticheskih zada. – M. : Izd-vo APN RSFSR, 1946. – Vypusk 6.
2. Blok A. Ja. Kurs algebry srednej shkoly: Metodicheskie rekomendacii dlja slushatelej FPK. – M. : Izd-vo MGPI, 1985. – 85s
3. Boltjanskij V. G. Nuzhna li proverka pri reshenii tekstovyh zadach na sostavlenie uravnenij? // Matematika v shkole. – № 3. – 1971. – S. 42–45.
4. Dalinger V. A. Vse dlja obespechenija uspeha na vypusknyh i vstupitel'nyh jekzamenah po matematike. Vypusk 2. Tekstovye zadachi, reshaemye metodom sostavlenija uravnenij : uchebnoe posobie. – Omsk : Izd-vo OmGPU, 1996. – 195 s.
5. Dalinger V. A. Tekstovye zadachi na procenty, smesi, splavy i koncentraciju: uchebnoe posobie. – Omsk : Izd-vo OmGPU, 2006. – 170 s.
6. Dalinger V. A. Obuchenie uchashhihsja resheniju tekstovyh zadach metodom sostavlenija uravnenij: posobie dlja uchitelej. – Omsk : Izd-vo IUU, 1991. – 48 s.
7. Dorofeev G. V. Proverka reshenij tekstovyh zadach // Matematika v shkole. – № 5. – 1974. – S. 37–45.
8. Evtushevskij V., Glazyrin A. Metodika prigotovitel'nogo kursa algebry. – Spb, 1876.
9. Krupich V. I. Struktura i logika processa obuchenija matematike v srednej shkole : metodicheskie razrabotki po speckursu dlja slushatelej FPK. – M. : Izd-vo MGPI, 1985. – 117 s.
10. Krygovskaja A. S. Razvitie matematicheskoj dejatel'nosti uchashhihsja i rol' zadach v jetom razvitii // Matematika v shkole. – № 6. – 1966. – S. 19–30.
11. Leont'ev A. N. Dejatel'nost'. Soznanie. Lichnost'. – M., 1977.
12. Liman M. M. O zadachah «nevozmozhnyh» i zadachah, ne imejushhih reshenija // Matematika v shkole. – № 1. – 1961. – S. 58–59
13. Ljapin S. E. Metodika prepodavanija matematiki. – M. – L., 1952.
14. Mashbic E. I. Psihologicheskij analiz uchebnoj zadachi // Sovetskaja pedagogika. – № 2. – 1973. – S. 58–65.
15. Poljakova T.N. Nuzhna li «proverka» pri reshenii tekstovyh zadach na sostavlenie uravnenij? // Matematika v shkole. – № 1. – 1971. – S. 45–46.
16. Rudnik A. V. Pereformulirovanie teksta zadachi kak put' otyskanija ee reshenija // Iz opyta prepodavanija matematiki v shkole: Posobie dlja uchitelej / sost. A. D. Semushin, S. B. Suvorova. – M. : Prosveshhenie, 1978. – S. 119–128.
17. Fridman L. M. Sjuzhetnye zadachi po matematike: Istorija, teorija, metodika: Uchebnoe posobie dlja uchitelej i studentov pedvuzov i kolledzhej. – M. : Shkol'naja Pressa, 2002. – 208 s.
18. Chukancev S. M. O zadachah na realizovannye situacii s lozhnymi dannymi // Matematika v shkole. – № 2. – 1977. – S. 13–15.